学校编码：10384　　　　分类号______ 密级______
学号：19020101152510　　　　UDC______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

Banach空间的等距映射与ε-等距映射

Isometries and ε-Isometries of Banach Spaces

陈 婉 贞

指导教师姓名：程 立 新 教授
专 业 名 称：基 础 数 学
论文提交日期：2013 年 5 月
论文答辩日期：2013 年 5 月
学位授予日期：2013 年 月

答辩委员会主席：__________
评 阅 人：__________

2012 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密　（　），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　）

作者签名：　　　　　　　　日期：　　年　月　日

导师签名：　　　　　　　　日期：　　年　月　日

目 录

Contents

中文摘要

令X,Y为Banach空间, $\varepsilon>0$, 映射$f:X\to Y$称为ε-等距, 如果$|\|f(x)-f(y)\|-\|x-y\||\le\varepsilon$, $\forall x,y\in X$. 本文主要对Banach空间中非满的ε-等距与线性等距之间关系进行了讨论.

首先, 在第一章中我们对Banach空间等距及ε-等距研究的历史进行回顾. 重点介绍了Banach空间的稳定性,左万有稳定空间、右万有稳定空间以及万有稳定空间的刻画.

然后在第二章中讨论ε-等距与线性等距之间的关系, 即: 令X为Banach空间,Y是$\ell_1(\Gamma)$, 假设$f:X\to Y$ 是满足$f(0)=0$的ε-等距, 则X可线性等距嵌入Y.

在2003年, Godefroy和Kalton[14]中研究等距与线性等距之间的关系. 有如下结论: 若X可分且映射$f:X\to Y$等距, 那么存在$g:X\to Y$是线性等距.
关于ε-等距与线性等距, 程老师和师兄在文章[22]中有结论: 设X,Y是两个Banach空间, 如果映射$f:X\to Y$满足$f(0)=0$的ε-等距, 那么存在$U:X^{**}\to Y^{**}$是线性等距. 所以当Y是自反空间时, X可线性等距嵌入Y. 本文, 我们讨论当$Y=\ell_1(\Gamma)$不是自反空间时, 有相同的结论. 是之前结论进一步提升.

在第三章中我们给出$f:X\to Y$是ε-等距映射虽不具有保基性质, 但存在X的一组基经f作用后是Y的基序列.

关键词：ε-等距；线性等距；保基

Abstract

A mapping f from a Banach space X to a Banach space Y is said to be an ε-isometry for some $\varepsilon > 0$ provided $|\|f(x) - f(y)\| - \|x - y\|| \le \varepsilon,\ \forall x, y \in X$. In this paper, we study the related issues of nonsurjective ε-isometries in Banach spaces. After a historical overview of the study of isometries and ε-isometries in Banach spaces in chapter 1,we study the relationship between ε-isometry and linear isometry.We can show If X is Banach space and there is an ε-isometry $f : X \to \ell_1(\tau)$, then $\ell_1(\tau)$ contains an isometric linear copy of X.

In 2003, Godefroy and Kalton [14] studied the relationship between isometry and linear isometry, and showed the following deep theorem:
If X is separable and there is an isometry $f : X \to Y$, then Y contains an isometric linear copy of X.

Recently, Cheng, Dai, Dong and Zhou [22] showed that for Banach spaces $X$and Y , if such an ε-isometry $f : X \to Y$ exists, then there is a linear isometry$U : X^{**} \to Y^{**}$. In particular, if Y is reflexive, then there is a linear isometry $U : X \to Y$ .So the result in this paper is improvement.

In chapter 3, we give ε-isometry $f : X \to Y$fails to preserve basis, But we can show that there exists a basic sequence such that f must map the basic sequence into a basic sequence.

Key words: ε-isometry; linear isometry; protect basis

第 一 章　引言

1.1　等距与ε-等距的发展历史回顾

设X, Y是两个Banach空间, $\varepsilon > 0$, 映射$f : X \to Y$称为ε-等距, 如果

$$|\|f(x) - f(y)\| - \|x - y\|| \le \varepsilon,\ \forall x, y \in X.$$

如果$\varepsilon = 0$, 则f就称为等距映射. 如果满足$f(X) = Y$, 则f称为满的ε-等距. 通常我们对ε-等距的研究可以分为以下四种情况:

(1) f是满的等距映射;

(2) f是非满的等距映射;

(3) f是满的ε-等距映射;

(4) f是非满的ε-等距映射.

1932年波兰数学家S. Mazur和S. Ulam首先开创了关于这种满的等距映射的研究, 给出了著名的Mazur-Ulam定理[2], 就以上问题(1)给出了非常完美的答案.

定理 1.1. (Mazur-Ulam) 假设映射$f : X \to Y$是满足$f(0) = 0$的满等距, 则f是线性的.

Mazur-Ulam定理在几何非线性泛函分析中有着非常重要的地位, 它告诉我们在Banach空间中空间的度量结构完全决定空间的线性结构, 这一定理激发了人们研究Banach 空间的非线性同胚与线性同胚之间的关系的热情. 但是一个简单的例子也告诉我们当等距映射非满的时候, Mazur-Ulam定理是不成立的.

例 1.1. 定义映射$f : \mathbb{R} \to \ell^2_\infty$, 对任意的$t \in \mathbb{R}$, 定义$f(t) = (t, \sin t)$, 此$f$是满足$f(0) = 0$的等距映射, 但是非满, 所以它不是线性的.

然而在上例中我们可以找到范数为1线性算子$P:\ell_\infty^2\to\mathbb{R}$ 定义为$P(t,s)=t$使得$P\circ f=I$. 于是Holsztynski和Lindenstrauss 猜测对于任何一般的等距嵌入f, 算子P总是存在的. 1968年, Figiel[3]证明了这一猜测, 给出著名的Figiel定理, 解决了(2)这种非满的等距问题.

定理 1.2. (Figiel[3]) 设X,Y是Banach空间, 映射$f:X\to Y$是满足$f(0)=0$的等距, 则存在唯一的线性算子$P:\overline{span}f(X)\to X$, 使得$\|P\|=1$且$Pf(x)=x,x\in X$.

显然当Figiel定理中的f是满射的时候, Figiel定理就是Mazur-Ulam定理. Figiel定理在研究Banach空间的等距嵌入及Lipschitz-free Banach空间中都有重要的应用(见文献[14]). 我们用$Lip_0(X)$表示Banach空间X上所有在0点取0值的实值Lipschitz函数全体. 若在Lip_X上赋予如下Lipschitz范数：

$$\|f\|_{Lip}=sup\{\frac{f(x)-f(y)}{\|x-y\|}:x,y\in X,x\neq y\}$$

则$Lip_0(X)$是一个Banach空间, 称为X的Lipschitz对偶空间. 对于任意的$x\in X$, 令$\delta(x)$表示赋值泛函, 即$\delta(x)(f)=f(x)$. 则$\delta(x)$是$Lip_0(X)$上的连续线性泛函, 可以证明由所有$\delta(x)$所组成集合的闭线性张是$Lip_0(X)$的典则预对偶空间. 这一预对偶空间我们用$\mathcal{F}(X)$来表示, 称为X上的Lipschitz-free空间. 可以证明映射$\delta:X\to\mathcal{F}(X)$是一个非线性等距. Godefroy和Kalton[14]利用Lipschitz-free空间$\mathcal{F}(X)$作为桥梁, 以Figiel定理作为工具, 证明了如果可分Banach空间X可等距嵌入Banach空间Y, 则X可线性等距嵌入Y. 他们还证明对于非可分弱紧生成空间X, 虽然X可等距嵌入$\mathcal{F}(X)$，但$\mathcal{F}(X)$中不存在子空间线性同构于X.

关于等距还有等距延拓问题，也就是Mazur-Ulam定理的另一种推广.

1972年, P.Mankiewice在[13]中证明了从Banach空间的一个连通开集到另一个连通开集的满等距可等距延拓为全空间上的等距算子(Mazur-Ulam定理说明这一算子还是仿射的). P.Mankiewice的证明思想与Mazur和Ulam的方法是一致的, 实际上这一定理可以理解为局部版本的Mazur-Ulam定理. Y. Benyamini和J. Lindenstrauss在专著

中, 也给出了一个局部版本的Mazur-Ulam定理, 并且覆盖了Mankiewice的结果,其证明也是相当简洁的. P.Mankiewice在[13]还得到一个有意思的结果, 从Banach空间的一个凸体(内部非空的闭凸集)到另一个凸体的满等距可延拓为全空间上的等距算子. 从前面的结果我们可以知道, 如果映射T 是从Banach空间的单位球到另一个Banach空间单位球上的满等距, 则T 可等距延拓成全空间上的线性等距算子.在此基础上, D.Tingley [15]于1987年提出了如下的一种广义的Mazur-Ulam问题:

问题1 设$S(X), S(Y)$分别是Banach空间X, Y 的单位球面,V_0是从$S(X)$到$S(Y)$上的满等距. 则是否存在从X到Y的线性等距算子V, 使得$V|_{S(X)} = V_0$?

D.Tingley[15]证明了当X, Y都是有限维空间时, 有$V(-x) = V(X)$成立. 问题1的表述十分简单, 但是回答这一问题却比想象的困难的多. 即使X, Y都是二维空间时, 这一问题的答案仍是未知的. 我们称Banach空间X具有Mazur-Ulam性质(MUP), 如果对于任意Banach空间Y及任意的从到$S(X)$到$S(Y)$上的满等距V_0, 都有从X到Y的线性等距算子V, 使得$V|_{S(X)} = V_0$. 关于这一方面的内容读者可以参考定光桂的综述文章[17]. 我们现在知道一些经典Banach空间(如ℓ_P, L_P, 其中$1 \le P \le \infty$, 及$C(\Omega)$是紧Hausdorff空间)是具有MUP的.

在1945年, Hyers和Ulam在[4]中提出了如下问题:
问题1 是否对于每个满的ε-等距$f : X \to Y$满足$f(0) = 0$,都可以找到一个满的线性等距$U : X \to Y$以及$\gamma > 0$使得

$$\|f(x) - Ux\| \le \gamma\varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Hyers-Ulam[4]提出这一问题是受到了实际问题的启发. 利用测量或实验的数据重塑物体的结构模型时, 数据总是有误差的. 如果任何两点间的距离的测量值的误差一致有界的话, 模型与原物体的结构之间能否一致的接近就是人们所关心的问题了. 在同一文章中, 他们证明了当X, Y为Hilbert空间时, 上述问题是正确的, 其中γ可以取到10. 在这之后, 数学家Hyers, Ulam , D.G.Bourgin及R.D.Bourgin都对这一问题进行了研究, 并得到了对一些经典Banach空间的肯定结果. 1978年,Gruber [18]在

这一问题上取得突破. 他证明了如果对于ε-等距f存在等距U, 使得当$\|X\| \to \infty$时有$\|f(x) - Ux\| = o(\|x\|)$成立, 则上述不等式成立且γ可以取到5. 另外, 他还证明对于有限维Banach空间来说, Hyers-Ulam问题的答案都是肯定的. 这一问题最终解决是在1983年, 智利数学家Gevirtz[19]通过一系列复杂而精细的估计证明了Gruber所描述的U是存在的, 从而给予了Hyers-Ulam问题肯定的回答. 1995年, 斯洛文尼亚数学家0mladič和他的学生Šemrl [5]对上式的估计进一步加细得到如下定理.

定理 1.3. (0mladič − Šemrl [5]) 设X, Y是Banach空间, 映射$f : X \to Y$是满足$f(0) = 0$的满的ε-等距, 则存在一个满的线性算子$U : X \to Y$, 满足

$$\|f(x) - Ux\| \leq 2\varepsilon, x \in X.$$

并且还举例说明常数2是可以取到的.

需要注意的是上述定理中ε-等距f是满射的条件是不能去掉的, 这可以从以下例子看出.

例 1.2. 定义映射$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$为$f(t) = (t, g(t))$, 其中

$$g(x) = \begin{cases} \log x & \text{当}x \geq 1\text{时;} \\ 0 & \text{当}x \leq 1\text{时.} \end{cases}$$

可以验证对于适当的ε，f为ε-等距. 但不存在等距$U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,使得$f(t)$和$U(t)$的距离一致有界.

虽然上述定理中f是满射的条件不能去掉, 但可以减弱. 1999年, Dilworth[20]引入δ-满的概念：映射$f : X \to Y$称为δ-满的, 如果$f(X)$包含Y的一个δ-网. 他证明了在一定条件下, 定理中满的条件可减弱为δ-满.

因此, 前面三种情况都已经得到完满的解决, 那么针对非满的ε-等距映射是否有接近于等距映射的一些性质呢? 前文中提到Figiel定理是非满等距的一个重要性质, 那么对于非满ε-等距是否有类似于Figiel定理的结论成立呢? Qian[6]在1995年就首次提出以下问题:

问题2 是否存在一个只依赖X, Y的常数$\gamma > 0$, 对每个ε-等距$f : X \to Y$满足$f(0) = 0$, 我们可以找到一个有界线性算子$T : L(f) \to X$使得

$$\|Tf(x) - x\| \le \gamma\varepsilon,\ \forall x \in X.$$

Qian在[6]中证明了当X, Y是L_p空间的时候, 以上问题的答案是肯定的, 其中上式的常数γ可取为6. 后来P. $\check{S}$emrl和J. V$\ddot{a}$is$\ddot{a}$l$\ddot{a}$在[11]中进一步给出了精确的估计, 即他们证明了当X, Y为L_p空间的时候, 常数γ可取为2. 但在一般情况下, 以上问题是不成立的. 针对以上问题, Qian在同一篇文章中给出了一个简单的反例:

例 1.3. $\forall\varepsilon > 0$, Y是一个可分的Banach空间, X是Y中一个不可补的闭子空间, $g : X \to B_Y$是满足$g(0) = 0$的双射, 我们定义$f : X \to Y$, $f(x) = x + \frac{\varepsilon g(x)}{2}$, $\forall x \in X$. 则很容易验证f是一个满足$f(0) = 0$的ε-等距映射并且$L(f) = Y$,但是却没有满足条件的T与γ存在.

结合J. Lindenstrass和L. Tzafriri于[12]中证明了: 如果一个Banach空间满足其每个闭子空间都可补, 则此Banach空间同构于一个Hilbert空间. 换句话说, 不同构于Hilbert空间的无穷维Banach空间总存在不可补的子空间, 这个局限性不可避免. 从上面那个反例可以看出, Y中不可补的闭子空间这个条件导致找不到满足条件的T与γ. 因此, Y中子空间的可补性对于研究ε-等距映射的稳定性十分重要.

[1]主要针对问题(4)—非满的ε-等距映射进行研究, 借助了下面这个非常重要的定理, 这个定理对于研究ε-等距映射的稳定性起着至关重要的作用.

定理 1.4. (cheng-dong-zhang) 设X, Y是两个Banach空间, $\varepsilon \ge 0$, 令$f : X \to Y$ 是满足$f(0) = 0$的ε-等距, 则对任意$x^* \in X^*$, 都存在$\phi_{x^*} \in Y^*$满足$\|\phi_{x^*}\| = \|x^*\|$使得

$$|\langle \phi_{x^*}, f(x)\rangle - \langle x^*, x\rangle| \le 4\varepsilon\|x^*\|,\ \forall x \in X.$$

有了上面这个定理, [1]就得到了如下关于ε-等距映射的稳定性的结论.

定义 1.1 (α-**可补子空间**). 设X是一个Banach空间, $0 \le \alpha < +\infty$. X中一个闭的线性子空间M称为X的α-可补子空间, 如果X中存在一个闭的线性子空间N满足$M \bigcap N = \{0\}$ 以及一个沿着N的投影$P: X \to M$, 使得$X = M + N$以及$\|P\| \le \alpha$.

定理 1.5. ([1]) 假设X, Y是两个Banach空间并且Y自反, 映射$f: X \to Y$是满足$f(0) = 0$的ε等距映射, 如果E是Y中一个Y的α-可补子空间, 则存在一个有界线性算子$T: Y \to X$, 满足$\|T\| \le \alpha$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \le 4\varepsilon, \ \forall x \in X.$$

当自反空间Y还是光滑且局部一致凸空间时, 则我们可以得到如下的精确估计.

定理 1.6. ([1]) 假设X, Y是两个Banach空间并且Y是自反的, Gateaux光滑和局部一致凸的. 映射$f: X \to Y$是满足$f(0) = 0$的ε-等距映射, 如果E是Y中一个Y的α-可补子空间, 则存在一个有界线性算子$T: Y \to X$, 满足$\|T\| \le \alpha$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \le 2\varepsilon, \ \forall x \in X.$$

2008年，Y. Dutrieux和G. Lancien [21]首先发现了下面的Figiel定理的不等式形式，很容易验证它是与Figiel定理等价的.

定理 1.7. 若$f: X \to Y$为等距, 且$f(0) = 0$,则对于任意$x_1, ..., x_n \in X$及$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$ 满足$\Sigma_{i=1}^n |\lambda_i| = 1$, 都有

$$\| \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \| \ge | \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \|$$

关于非满ε-等距有类似结果:

定理 1.8. 若$f: X \to Y$为等距, 且$f(0)=0$,则对于任意$x_1,...,x_n \in X$及$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$ 满足$\Sigma_{i=1}^{n}|\lambda_i|=1$, 都有

$$\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\|+4\varepsilon \geq |\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\|$$

在P. $\check{S}$emrl和J. Väis$\ddot{a}$l$\ddot{a}$ 之后, 对于Banach空间中非满ε-等距的研究陷入停滞状态. 我们转而研究万有稳定空间及万有稳定空间的刻画.

1.2 万有稳定空间

定义 1.2. (稳定的) 设X, Y是Banach空间,称(X,Y)是稳定的. 如果对$\forall\varepsilon>0$, 对任意$f: X \to Y$是满足$f(0)=0$的ε-等距映射, 都存在γ和有界线性算子$T: L(f) \to X$, 使得

$$\|Tf(x)-x\| \leq \gamma\varepsilon,\ \forall x \in X.$$

关于稳定的, 程老师和师兄提出如下问题:

(1)是否存在这样的Banach空间X, 使得对任意Banach空间Y及对任意$f: X \to Y$是满足$f(0)=0$的ε-等距映射, 都存在γ和有界线性算子$T: L(f) \to X$, 使得$\|Tf(x)-x\| \leq \gamma\varepsilon,\ \forall x \in X$.成立.
称满足上述条件的空间X为左万有稳定空间.

(2)是否存在这样的Banach空间Y, 使得对任意Banach空间X及对任意$f: X \to Y$是满足$f(0)=0$的ε-等距映射, 都存在γ和有界线性算子$T: L(f) \to X$, 使得$\|Tf(x)-x\| \leq \gamma\varepsilon,\ \forall x \in X$.成立.
称满足上述条件的空间Y为右万有稳定空间.

关于右万有稳定空间, 受Qian[6]反例的启发我们有如下结论.

定理 1.9. (Cheng-Dai-Dong-Zhou) 设Y为Banach空间, Y是右万有稳定空间当且仅当Y同构于Hilbert空间.

这样, 我们就对右万有稳定空间进行很好的刻画. 在同构意义下，就是Hilbert空间.

关于左万有稳定空间，我们也试图寻找它的等价刻画. 但不幸的是没有得到像右万有稳定那么简洁结论. 左万有稳定空间有如下结论:

定理 1.10. ([22]) 设X为内射空间, Y为任一Banach空间, 那么对任意$f: X \to Y$是满足$f(0)=0$的ε-等距映射, 都存在γ和有界线性算子$T: L(f) \to X$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \le \gamma\varepsilon,\ \forall x \in X.$$

通常我们所熟悉的内射空间有ℓ_∞和有限维空间, 并且ℓ_∞是包含它的空间的1-可补子空间, 所以ℓ_∞和有限维空间都是左万有稳定的. 又因为有限维空间同构于Hilbert空间，所以是万有稳定的.

定理 1.11. ([22]) 设X为无限维Banach空间, 且X线性同构于ℓ_∞的一个子空间, 那么X是左万有稳定的当且仅当X线性同构于ℓ_∞.

在通常情况下, 不知上述定理是否成立. 也就是是否有左万有稳定空间就是内射空间?

程老师和师兄在另一篇文章中解决了当X是对偶的情况.

定理 1.12. ([23]) 设X为Banach空间且X是对偶空间, 若X是左万有稳定空间, 那么X同构于$\ell_\infty(\Gamma)$的可补弱$*$闭子空间. 也就是X 是内射空间.

当X, Y为可分Banach空间时, 我们有如下结论:

定理 1.13. ([23]) 设X为可分Banach空间, 那么对任意可分Banach空间Y及任意$f: X \to Y$是满足$f(0)=0$的ε-等距映射, 都存在$\gamma > 0$和有界线性算子$T: L(f) \to X$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \le \gamma\varepsilon,\ \forall x \in X.$$

当且仅当X是可分内射空间.(X线性同构于c_0)

近来，我们终于得到左万有稳定空间的等价刻画.

定理 1.14. ([23]) 设X为Banach空间, 那么X是左万有稳定空间当且仅当X是基数单的. (Cardinality injective space)

虽然问题得以解决, 但还有疑惑基数单空间与内射空间不等价到底差别在哪?

1.3 本文主要结果

本文主要对Banach空间中非满的ε-等距与线性等距之间关系进行了讨论. 全篇文章组织如下:

第一章 我们对Banach空间等距及ε-等距研究的历史进行回顾; 重点介绍了Banach空间的稳定性,左万有稳定空间、右万有稳定空间以及万有稳定空间的刻画.

第二章 我们讨论ε-等距与线性等距之间的关系, 即: 令X为Banach空间,Y是$\ell_1(\Gamma)$, 假设$f : X \to Y$ 是满足$f(0) = 0$的ε-等距, 则X可线性等距嵌入Y.
在2003年, Godefroy和Kalton[14]中研究等距与线性等距之间的关系. 有如下结论:
若X可分且映射$f : X \to Y$等距, 那么存在$g : X \to Y$是线性等距.关于ε-等距与线性等距.
程老师和师兄在文章[22]中有结论: 设X, Y是两个Banach空间, 如果映射$f : X \to Y$满足$f(0) = 0$的ε-等距, 那么存在$U : X^{**} \to Y^{**}$是线性等距. 所以当Y是自反空间时, X可线性等距嵌入Y. 本文, 我们讨论当$Y = \ell_1(\Gamma)$不是自反空间时, 有相同的结论. 是之前结论进一步提升.

第三章 我们给出$f : X \to Y$是ε-等距映射虽不具有保基性质, 但存在X的一组基经f作用后是Y的基.